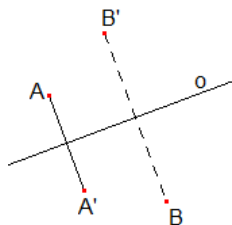


Osová súmernosť

Nech je daná rovina a v nej priamka o . **OSOVOU SÚMERNOSŤOU s osou o** (označenie $\mathcal{O}_o$) nazývame zobrazenie, pre ktoré platí:

- a) ak $X \in o$, potom $\mathcal{O}_o(X) = X$
- b) ak $X \notin o$, potom $\mathcal{O}_o(X) = X'$, pričom úsečka XX' je kolmá na o a jej stred leží na o .

Dané sú tri rôzne body A, B a A' , pričom bod A' je obrazom bodu A v nejakej osovej súmernosti. Nájdite obraz bodu B v tejto neznámej súmernosti.



Riešenie: Vieme, že stred úsečky AA' leží na osi o súmernosti a že os o je kolmá na AA' . Os súmernosti o je teda osou úsečky AA' . Keď poznáme os súmernosti, ľahko už zostrojíme, obraz bodu B .

Vidíme, že na to, aby sme zostrojili obraz bodu v osovej súmernosti, nemusíme mať vždy danú jej os. Stačí nám poznať bod a jeho obraz v súmernosti a os vieme zostrojiť. Hovoríme, že:

Osová súmernosť je jednoznačne určená:

- 1) osou súmernosti
- 2) dvojicou bodov, ktoré sa na seba zobrazia (vzorom a obrazom).

Pre ktoré body X platí:

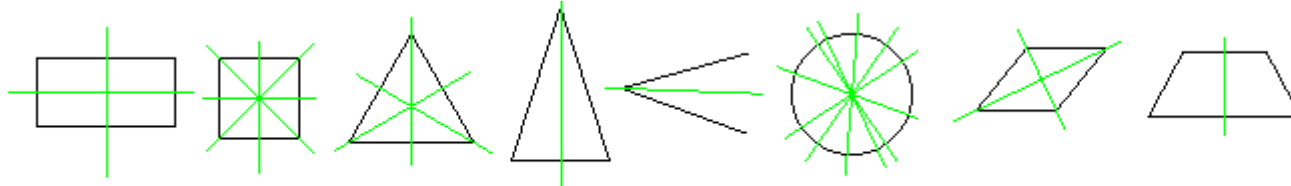
- a) $\mathcal{O}_o(X) = X$ (teda ktoré body sú samodružné?)
- b) $\mathcal{O}_o(\mathcal{O}_o(X)) = X$?

Riešenie:

- a) pre body ležiace na osi o
- b) pre všetky body

Určte všetky osi súmernosti daných útvarov: a) priamka, b) úsečka, c) konvexný uhol, d) obdĺžnik, e) štvorec, f) kosoštvorec, g) kosodĺžnik, h) deltoid, i) rovnostranný trojuholník, j) rovnoramenný trojuholník, k) pravouhlý trojuholník, l) všeobecný trojuholník, m) kružnica, n) všeobecný lichobežník, o) rovnoramenný lichobežník, p) pravidelný päťuholník, q) pravidelný šesťuholník

Riešenie: a) každá priamka na ňu kolmá (nekonečne veľa), b) os úsečky (1), c) os uhla (1), d) osi strán (2), e) osi strán a uhlopriečky (4), f) uhlopriečky (2), g) nemá os súmernosti (0), h) uhlopriečka (1), i) osi strán (3), j) os základne (1), k) nemá osi súmernosti (0), l) nemá os súmernosti (0), m) stred kružnice (nekonečne veľa), n) nemá os súmernosti (0), o) os základne (1), p) osi strán (5), q) spojnice protiľahlých vrcholov a osi strán (6)



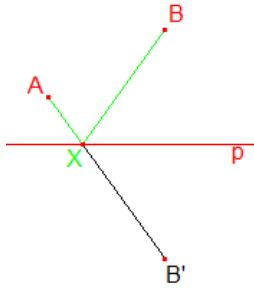
VETY O OSOVEJ SÚMERNOSTI

- 1) Priamka rovnobežná s osou súmernosti sa zobrazí do priamky s ňou rovnobežnej, pričom os súmernosti je osou pásu ohraničeného priamkou a jej obrazom.
- 2) Obrazom rôznobežnej priamky vzhľadom na os je priamka, ktorá sa s danou priamkou pretína na osi. Os súmernosti je osou jednej dvojice vrcholových uhlov vytvorených priamkou a jej obrazom.
- 3) Priamka kolmá na os súmernosti je samodružná.
- 4) Kružnica, ktorej stred leží na osi súmernosti je samodružná.
- 5) Kružnica, ktorej stred neleží na osi súmernosti, sa zobrazí do kružnice s rovnakým polomerom ako mala pôvodná kružnica.

VYUŽITIE OSOVEJ SÚMERNOSTI V KONŠTRUKČNÝCH ÚLOHÁCH

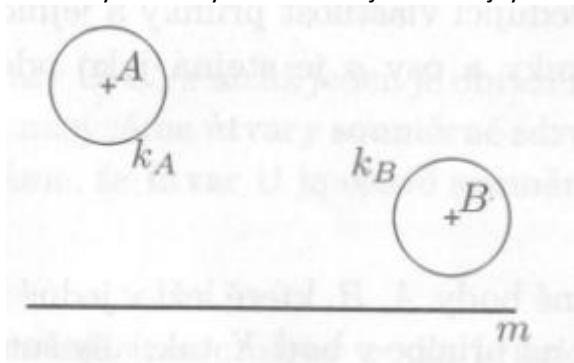
Osovú súmernosť možno využiť pri úlohách o odraze, kde sa využíva zákon známy z fyziky: *Uhol dopadu sa rovná uhlu odrazu*. Tiež sa využíva pri úlohách o spojení dvoch (alebo viacerých bodov) pomocou najkratšej lomenej čiary a v úlohách, kde treba zostrojiť spojnicu dvoch útvarov kolmú na nejakú priamku, ktorou je rozpolňovaná.

- ① Daná je priamka p a body A, B , ktoré ležia v jednej polrovine určenej priamkou p . Nájdite na priamke p bod X tak, aby súčet $AX + BX$ bol najmenší.



Riešenie: Najkratšou spojnicou dvoch bodov je úsečka. Keby body A, B ležali v opačných polrovinách, bod X by bol spoločný bod priamky p a úsečky AB . No aj keď body A, B ležia v jednej polrovine, pomocou osovej súmernosti vieme jeden z nich "prehodiť" do opačnej polroviny. Tím sa príklad zmení na nájdenie najkratšej spojnice dvoch bodov.

- ② Úlohy o odraze poznáte z fyziky, vyskytujú sa však aj v športe. Ako by ste rozhodli: Mohol pri postavení podľa obrázka hráč A prihrať spoluhráčovi B odrazom o mantinel m ? Hráč je schopný zachytiť puk v prípade, že dráha puku prechádza vymedzeným dosahom jeho hokejky.



- ③ Zostrojte trojuholník ABC , ak sú dané jeho vrcholy A, C a priamka o , ktorá je osou uhla θ .
- ④ Je daná priamka p a body A, B ležiace v opačných polrovinách s hraničnou priamkou p (AB nie je kolmá na p). Na priamke p zostrojte bod V tak, aby os uhla AVB ležala na priamke p .
- ⑤ Daný je ostrý uhol XVY a bod A ležiaci vnútri tohto uhla. Na polpriamke VX zostrojte bod B a na polpriamke VY bod C tak, aby trojuholník ABC mal čo najmenší obvod.
- ⑥ Dané sú dve rôzne priamky p a o a kružnica $k(O; r)$. Na priamke p zostrojte bod X a na kružnici k bod Y tak, aby úsečka XY bola kolmá na priamku o a aby jej stred ležal na priamke o .
- ⑦ Dané sú rovnobežky a, t preťaté tretou priamou b . Zostrojte všetky rovnostranné trojuholníky ABC , ktorých vrchol A leží na priamke a , vrchol B na priamke b a ťažnica t_c na priamke t .
- ⑧ Dané sú tri rôzne priamky a, b, c a bod T ležiaci na priamke a . Zostrojte všetky rovnoramenné trojuholníky s ťažiskom T a základňou BC tak, aby vrcholy A, B, C ležali po poradí na priamkach a, b, c .
- ⑨ Dané sú rovnobežky a, u preťaté tretou priamou c . Zostrojte všetky štvorce $ABCD$, ktorých vrchol A leží na priamke a , vrchol C na priamke c a uhlopriečka BD na priamke u .
- ⑩ Dané sú dve rôzne kružnice k_1, k_2 a priamka p . Zostrojte všetky rovnostranné trojuholníky ABC , ktorých výška v_c leží na priamke p , bod A na k_1 a bod B na k_2 .